TRANSPONOVANÁ MATICE

SYMETRICKÁ MATICE

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad A = A^T$$

ANTISYMETRICKÁ MATICE

$$A = -A^T$$

Každou matici můžeme zapsat jako součet symetrické a antisymetrické matice.

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

HODNOST MATICE

A, $m \times n$

řádky $r_1, \dots, r_m$, $c_1, \dots, c_m \in P$

$c_1 r_1 + \dots + c_m r_m$ je LINEÁRNÍ KOMBINACE řádků $r_1, \dots, r_m$ s koef. $c_1, \dots, c_m$.

Řádky $r_1, \dots, r_k$, $k \in \mathbb{N}$,

Pokud platí implikace

$$c_1 r_1 + \dots + c_k r_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

pak řádky $r_1, \dots, r_k$ jsou LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ.

Řádky, které nejsou lin. nezávislé, jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

Příklad
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c_1(1,2) + c_2(3,4) = (0,0)$$
$$(c_1, 2c_1) + (3c_2, 4c_2) = (0,0)$$
$$(c_1 + 3c_2, 2c_1 + 4c_2) = (0,0)$$

$c_1 + 3c_2 = 0$ $\quad c_1 = -3c_2 \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$

$2c_1 + 4c_2 = 0$ $\quad -6c_2 + 4c_2 = 0$

$\underline{c_2 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c_1(1,2) + c_2(3,6) = 0$$
$$(c_1 + 3c_2, 2c_1 + 6c_2) = (0,0)$$
$$c_1 = -3c_2$$
$$-6c_2 + 6c_2 = 0$$
$$0 = 0 \qquad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$c_2 = 1,\ c_1 = -3$$

HODNOST matice je maximální počet jejích lin. nezávislých řádků.

A matice, řádky $r_1, \dots, r_m$.

r_1, r_2 lin. nezávislé.

r_1, r_2, r_4 lin. závislé.

Hodnost matice A se značí $\operatorname{rank} A$.

Tvrzení Elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice.

Důkaz 1) přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku.

A' ... i-tý řádek $r_i + c r_j$

$r_1, \dots, r_k$ lin. nezáv. řádky

$r_1, \dots, r_i + c r_j, \dots, r_j, \dots, r_k$

$$c_1 r_1 + \dots + c_i (r_i + c r_j) + \dots + c_j r_j + \dots + c_k r_k = 0$$

$$c_1 r_1 + \dots + c_i r_i + \dots + (c_i c + c_j) r_j + \dots + c_k r_k = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_i = \dots = c_i c + c_j = \dots = c_k = 0$$

$$\Rightarrow c_j = 0$$

$\Rightarrow r_1, \dots, r_i + c r_j, \dots, r_j, \dots, r_k$ jsou lin. nezávislé.

Zbytek DÚ.

Tvrzení Hodnost matice ve schodovitém tvaru je počet nenulových řádků.

Důkaz
$$\begin{pmatrix} a & - & - & - & - \\ 0 & b & - & - & - \\ 0 & 0 & c & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 \end{pmatrix}$$

$r_1, \dots, r_k, 0$ lin. z.

$0 \cdot r_1 + \dots + 0 \cdot r_k + 7 \cdot 0 = 0$

REGULÁRNÍ MATICE

je čtvercová matice, jejíž hodnost je rovna počtu řádků.

SINGULÁRNÍ MATICE

není regulární.

Tvrzení: Každá regulární matice je řádkově ekvivalentní jednotkové matici.

$$\begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \bullet \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Tvrzení: Násobení regulární maticí nemění hodnost.

A, B - regulární $\qquad B = Q_k \cdot \ldots \cdot Q_1 \cdot E$

$B \cdot A \qquad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B \cdot A$

DETERMINANT

Permutace

- zobrazení
- bijekce

M konečná množina.

Bijekce $\sigma: M \to M$ je PERMUTACE na množině M.

$M = \{1, 2, \dots, n\}$

S_n je množina všech permutací na n-prvkové množině.

Počet permutací v S_n je $n!$.

$i, j \in M$, $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$

(i, j) tvoří inverzi permutace σ. σ_i σ_j

$\mathrm{inv}\,\sigma$ počet inverzí permutace σ.

$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}$ znaménko perm. σ.

A typu $n \times n$ nad polem P.
DETERMINANT matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n}$$

$1 \mapsto 2 \quad \sigma_1 = 2$
$2 \mapsto 1 \quad \sigma_2 = 1$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$n = 1 \quad A = (a)$

$M = \{1\} \quad \sigma: 1 \mapsto 1 \quad S_1 = \{\sigma\}$

$\operatorname{inv} \sigma = 0 \quad \operatorname{sgn} \sigma = 1$

$$\det A = 1 \cdot a = a$$

$n = 2, \quad M = \{1, 2\}$

$\mathrm{id}: 1 \mapsto 1 \quad \operatorname{inv} \mathrm{id} = 0$
$\quad 2 \mapsto 2 \quad \operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1.$

$\sigma: 1 \mapsto 2 \quad \operatorname{inv} \sigma = 1$
$\quad 2 \mapsto 1 \quad \operatorname{sgn} \sigma = -1.$

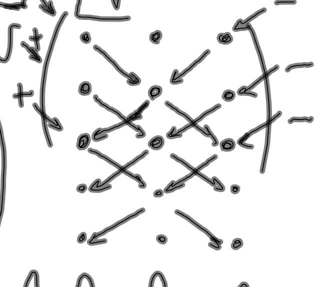
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot A_{11} \cdot A_{22} + (-1) A_{12} A_{21}$$
$$= A_{11} A_{22} - A_{12} \cdot A_{21}$$

$\boxed{\text{Sarrusovo pravidlo}}$

$n = 3 \quad$ 6 permutací

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$



$$\det A = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - $$
$$- A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32}$$

Tvrzení: Je-li některý řádek matice A nulový => det A = 0.

Tvrzení: Jsou-li dva řádky matice A stejné => det A = 0.